

- Faculté des sciences
- [www.unine.ch/sciences](http://www.unine.ch/sciences)

## Algèbre linéaire (3MT1046)

Filières concernées	Nombre d'heures	Validation	Crédits ECTS
<b>Bachelor en biologie</b>	<b>Cours: 4 ph TP: 3 ph</b>	Voir ci-dessous	9
<b>Bachelor en mathématiques</b>	<b>Cours: 4 ph TP: 3 ph</b>	Voir ci-dessous	9
<b>Bachelor en science des données</b>	<b>Cours: 4 ph TP: 3 ph</b>	Voir ci-dessous	9
<b>Bachelor en sciences et sport (mathématiques)</b>	<b>Cours: 4 ph TP: 3 ph</b>	Voir ci-dessous	9
<b>Master en informatique</b>	<b>Cours: 4 ph TP: 3 ph</b>	Voir ci-dessous	9
<b>Pilier B A - mathématiques</b>	<b>Cours: 4 ph TP: 3 ph</b>	Voir ci-dessous	9

ph=période hebdomadaire, pg=période globale, j=jour, dj=demi-jour, h=heure, min=minute

### Période d'enseignement:

- Semestre Automne

### Equipe enseignante

Professeur: Michel Benaim  
Assistant: Leonard Tschanz

### Contenu

Syllabus du cours

1. Lois de composition, Groupes

1.1 Généralités

Lois de composition interne, externe

1.2 Groupes

Définition, élément neutre, exemples, homomorphisme et isomorphisme

1.2.1 Le groupe des isométries du plan

1.3 Sous-Groupes, Groupes engendrés, Groupes produits

Noyau, image, ordre d'un élément

1.4 Groupe quotient dans le cas abélien

Relation et classes d'équivalence

Groupe quotient, décomposition d'un homomorphisme de groupe,  $Z/aZ$ , groupe cyclique

1.5 Groupe Symétrique

Transpositions décomposition en produit de transpositions

2. Anneaux et Corps

2.1 Généralités

Distributivité des loi, exemples

2.2 Anneaux et Corps

Définitions, caractéristique d'un corps,  $Z/pZ$

2.3 Le corps des complexes

Définitions, exponentielle complexe, l'homomorphisme exponentiel, angles, Formule de Moivre

3. Espaces Vectoriels

3.1 Généralités

Définitions, sous espaces vectoriels, applications linéaires, noyau, image

3.2 Produit, somme directe, quotient

3.3 Bases

Famille libre, génératrice, base

3.4 Espaces de dimension finie

Exemples, Théorème d'extraction, Th. de la base incomplète, Th. de la dimension (toutes les bases ont même cardinal). Théorème du rang ( $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$ , pour  $f$  dans  $L(E,F)$ ).

3.5 Un exemple d'espace vectoriel de dimension 2 : l'espace des suites solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2

URLs	1) <a href="https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=5187">https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=5187</a>
------	--

- Faculté des sciences
- [www.unine.ch/sciences](http://www.unine.ch/sciences)

## Algèbre linéaire (3MT1046)

Recherche d'une base et exemples

### 4. Applications linéaires

#### 4.1 Généralités

Si  $K$  est commutatif,  $L(E, F)$  est un e.v

#### 4.2 Le groupe $GL(E)$

En dimension finie, bijectif = injectif = surjectif = inverse à gauche = inverse à droite

Contre-exemple en dimension infinie ( $E = \text{polynômes}$ ,  $D$  la dérivée,  $\text{Int}$  l'intégration  $D \circ \text{Int} = \text{Id}$  mais  $D$  et  $\text{Int}$  ne sont pas bijectives)

### 5. Matrices

#### 5.1 Généralités

Propriétés élémentaires, produit, dimension

Matrices carrées, matrices diagonales, triangulaires

#### 5.2 Applications linéaires et matrices

Lien entre application linéaire et matrice, toute application linéaire en dimension finie peut se représenter par une matrice

#### 5.3 Exemples d'applications linéaires et matrices

Rotations, projection orthogonales, dérivées d'un polynôme, etc.

#### 5.4 Changement de base

Matrices de passage, formules de changement de base, matrices semblables

#### 5.5 Transposée d'une matrice

Définition, propriétés élémentaires (transposée d'un produit, d'une somme). Relation de dualité  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ . Matrices orthogonales et isométries

### 6. Déterminants

#### 6.1 Formes multilinéaires

Définitions, exemples, l'espace des  $n$ -formes en dimension  $n$  est de dimension 1

#### 6.2 Déterminants

6.3 Déterminants d'une famille de  $n$  vecteurs, d'une matrice, d'un endomorphisme.

Propriétés classiques :  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ,  $\det A = 0$  ssi  $\text{rang}(A) < n$ ,  $\det(A^t) = \det(A)$

6.4 Calculs de déterminants, développement par rapport à une ligne/colonne, déterminant d'une matrice bloc diagonale,

#### 6.5 Systèmes linéaires et formules de Cramer

### 7. Réduction des matrices carrées

7.1 Vecteurs propres, valeurs propres, polynôme caractéristique

7.2 Réduction à la forme triangulaire dans  $\mathbb{C}$

Toute matrice dans  $\mathbb{C}$  est réductible à la forme triangulaire

7.3 Sous espaces propres, diagonalisation

Les sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Une application linéaire ayant  $n$  valeurs propres distinctes en  $\dim n$  est diagonalisable

7.4 Polynômes d'endomorphisme et théorème de Cayley Hamilton

Preuve du théorème dans  $\mathbb{C}$  (pour les matrices diagonales, puis diagonalisables et par densité pour toute matrice)

7.5 Sous espaces caractéristiques

Les sous espaces caractéristiques d'une matrice sont stables par la matrice ; l'espace est la somme directe des sous espaces caractéristiques et chaque sous espace a pour dimension la multiplicité algébrique de la valeur propre

## Forme de l'évaluation

Examen écrit de 2 heures portant sur les exercices, donc exigeant d'avoir compris la théorie et d'être capable de l'appliquer.

En cas d'échec une deuxième tentative est possible à une session d'examens ultérieure.

## Documentation

Quelques ouvrages:

J. Lelong Ferrand, J.M Arnaudies, Cours de Mathématiques, Tome 1: Algèbre  
Dunod, 1977. Un cours classique très complet.

H. Anton, C. Rorrès, Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications, Student Version, 10th Edition, Wiley.

R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann : un grand classique, beaucoup d'exercices, pas toujours faciles

K. Jänich, Lineare Algebra, Springer

S. Lipschutz, Algèbre linéaire, Schaum, Mc Graw-Hill : livre avec de nombreux exercices corrigés.

A.Robert, Linear Algebra, World Scientific : beaucoup d'exemples

## URLs

1) <https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=5187>

- Faculté des sciences
- [www.unine.ch/sciences](http://www.unine.ch/sciences)

### **Algèbre linéaire (3MT1046)**

G. Strang, Linear algebra and its applications, Harcourt: on trouve une vidéo basée sur ce cours sur le WEB (voir plus bas)

On trouve par ailleurs de nombreux cours d'algèbre linéaire téléchargeables en cherchant avec un moteur de recherche sous « algèbre linéaire » ou « linear algebra ».

Parmi les choses que l'on trouve sur le WEB, signalons :

- une vidéo complète de l'ensemble du cours de G. Strang. <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-06Spring-2005/CourseHome/index.htm>

- le cours de J. Hefferon\*. (<http://joshua.smcvt.edu/linearalgebra/>).

Exercices interactifs en lignes

- [http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=1L7D00FA12.4&+lang=fr&+module=home&+search\\_category=exercice&+search\\_keywords=espaces+vectoriels](http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=1L7D00FA12.4&+lang=fr&+module=home&+search_category=exercice&+search_keywords=espaces+vectoriels)

- [http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=1L7D00FA12.4&+lang=fr&+module=home&+search\\_category=exercice&+search\\_keywords=algèbre+linéaire](http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=1L7D00FA12.4&+lang=fr&+module=home&+search_category=exercice&+search_keywords=algèbre+linéaire)

Outils de calculs en ligne

[http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=l67292E3BE.1&+lang=fr&+module=home&+cmd=new&+search\\_category=T](http://wims.unice.fr/wims/wims.cgi?session=l67292E3BE.1&+lang=fr&+module=home&+cmd=new&+search_category=T)

#### **Pré-requis**

Le cours s'appuie sur les notions de base de géométrie et de l'espace acquises au lycée.

#### **Forme de l'enseignement**

Ex cathedra pour le cours et interactif pour les exercices. Le cours a son site Moodle (voir ci-dessous): il est impératif de s'y inscrire (divers documents, dont les séries d'exercices, y seront postés).

URLs

1) <https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=5187>