DESCRIPTIFS DES COURS 2019-2020

- Faculté des sciences
- www.unine.ch/sciences

Géométrie spectrale (3MT2087)

Filières concernées	Nombre d'heures	Validation	Crédits ECTS
Bachelor en mathématiques	**Cours: 2 ph** **Exercice: 2 ph**	**Voir ci-dessous**	6
Master en mathématiques	**Cours: 2 ph** **Exercice: 2 ph**	**Voir ci-dessous**	6

ph=période hebdomadaire, pg=période globale, j=jour, dj=demi-jour, h=heure, min=minute

Période d'enseignement:

- Semestre Printemps

Equipe enseignante

Professeur: Bruno Colbois;

Assistante: Hélène Perrin

Contenu

Le but de ce cours est de présenter un thème de recherche actuel avec, notamment, l'exposition de questions de recherche et de résultats récents. On démontrera tout au long du cours un certain nombre de résultats classiques et on fera de nombreuses digressions. La géométrie spectrale consiste à comprendre les solutions d'équations aux dérivées partielles linéaires (essentiellement liées au laplacien dans ce cours) en les abordant d'un point de vue géométrique. Bien que cette approche puisse se faire dans le contexte général de la géométrie riemannienne, on se bornera dans ce cours à étudier des équations dans des domaines euclidiens, ce qui ne nécessite que peu de pré-requis.

1 Introduction et motivation
1.1 Rappel d'algèbre linéaire
1.2 Modélisation d'une corde vibrante
1.3 Un exemple en dimension 2
1.3.1 Rectangle minimisant les valeurs propres
1.4 Un autre exemple (assez) explicite : le disque

2 Le spectre du laplacien
2.1 Propriétés générales du spectre et des fonctions propres
2.2 Digression : à propos de la régularité du bord du domaine

3 Monotonie du spectre de Dirichlet et applications
3.1 Monotonie du spectre pour le problème de Dirichlet
3.2 Etude qualitative des domaines nodaux pour le problème de Dirichlet
3.3 Théorèmes de Courant et de Pleijel
3.4 Digression : ensemble nodaux de la deuxième valeur propre

4 Le problème de Neumann
4.1 Construction de petites valeurs propres
4.2 Spectre et quasi-isométries
4.3 Décomposition des domaines
4.3.1 Digression : spectre de domaines reliés par des anses fines

5 Peut-on entendre les trous d'un tambour ?
5.1 Spectre et perturbations topologiques
5.1.1 Digression : estimations fines du spectre lors de perturbations topologiques.
5.1.2 Digression : Retour au problème de Neumann sur la réunion de deux domaines reliés par une anse fine.

6 Peut-on entendre la forme d'un tambour ?
6.1 Domaines isospectraux non isométriques
6.1.1 Propriété de réflexion
6.1.2 Construction de domaines isospectraux, non isométriques

URLs	1) https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=3798

Géométrie spectrale (3MT2087)

6.2 Développements en cours et questions ouvertes
6.2.1 Exemples de domaines isospectraux non isométriques
6.2.2 Domaines déterminés par leur spectre
6.2.3 Ajout de contraintes
6.3 Digression : prescription du spectre

7 Formule de Weyl : on peut entendre le volume d'un tambour
7.1 Loi asymptotique de Weyl
7.2 La conjecture de Polya

8 Inégalités isopérimétriques
8.1 Introduction
8.2 L'inégalité de Faber-Krahn et ses développements
8.2.1 La boule est déterminée par son spectre
8.2.2 Preuve du théorème de Pleijel dans R^n
8.2.3 Minimisation de la deuxième valeur propre du problème de Dirichlet
8.3 Développements actuels liés aux inégalités isopérimétriques
8.3.1 Inégalités du type Faber-Krahn pour d'autres conditions au bord . 84
8.3.2 Inégalités du type Szegö pour d'autres conditions au bord
8.3.3 La stabilité
8.3.4 Valeurs propres extrémales et domaines extrémaux
8.3.5 L'approche numérique

9 Autour de la preuve de l'inégalité de Faber-Krahn
9.1 Symétrisation de Schwarz
9.2 Idée de la preuve de l'inégalité de Faber-Krahn
9.3 La preuve de l'inégalité de Faber-Krahn en dimension 2 : la preuve initiale de Krahn revisitée

10 Autour de la preuve de l'inégalité de Szegö-Weinberger

11 L'inégalité de Cheeger (sous réserve)

Forme de l'évaluation

Examen oral de 30 minutes. Présentation durant 20 minutes d'une des questions de cours (données à l'avance) suivie de 10 minutes de discussion.

Documentation

On citera de nombreux articles durant le cours. Les références seront citées au fur et à mesure et mises sur le site web du cours.

Pré-requis

Cours des trois premiers semestres de bachelor.

Forme de l'enseignement

Interactif, avec un mélange de cours, de présentations plus informelles de thèmes de recherche et discussion en commun de quelques exercices en parallèle du cours. J'espère également avoir quelques présentations par des intervenants extérieurs s'ils peuvent proposer un exposé de niveau adéquat. Selon le nombre et l'intérêt des étudiants, ils pourront eux-même faire un exposé.

Objectifs d'apprentissage

Au terme de la formation l'étudiant-e doit être capable de :

- Expliquer quelques résultats classiques
- Décrire des exemples standards
- Formuler des questions actuelles de recherche dans le domaine du cours
- Développer une intuition géométrique en relation avec les thèmes du cours
- Distinguer les difficultés techniques spécifiques aux questions abordées durant le cours
- Employer les connaissances acquises pour aborder des questions de recherche liées au cours
- Utiliser la littérature présentée durant le cours

URLs	1) https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=3798